模块三 三角函数的图象性质

第 1 节 求三角函数解析式 $f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)+B$（★★★）

强化训练

1．（★★）设 $f(x)=4\cos(2x-\dfrac{\pi}{6})\sin 2x$，则函数 $y=f(x)$ 的值域为_____.

答案：$[-1,3]$

解析：欲求值域，得把解析式化简，首先拆 $\cos(2x-\dfrac{\pi}{6})$ 这一项，

由题意，$f(x)=4(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x+\dfrac{1}{2}\sin 2x)\sin 2x=2\sqrt{3}\sin 2x\cos 2x+2\sin^2 2x$，

再降次，并用辅助角公式合并，所以 $f(x)=\sqrt{3}\sin 4x+1-\cos 4x=2\sin(4x-\dfrac{\pi}{6})+1$，

因为 $-1\le\sin(4x-\dfrac{\pi}{6})\le 1$，所以 $-1\le f(x)\le 3$，故 $f(x)$ 的值域为 $[-1,3]$.

2．（★★）已知函数 $f(x)=\sin^2(x+\dfrac{\pi}{3})+\cos^2 x(x\in\mathbf{R})$，则 $f(x)$ 的最小正周期为_____，值域为_____.

答案：π，$[1-\dfrac{\sqrt{3}}{2},1+\dfrac{\sqrt{3}}{2}]$

解析：先把解析式化简，两项均为平方，所以降次，

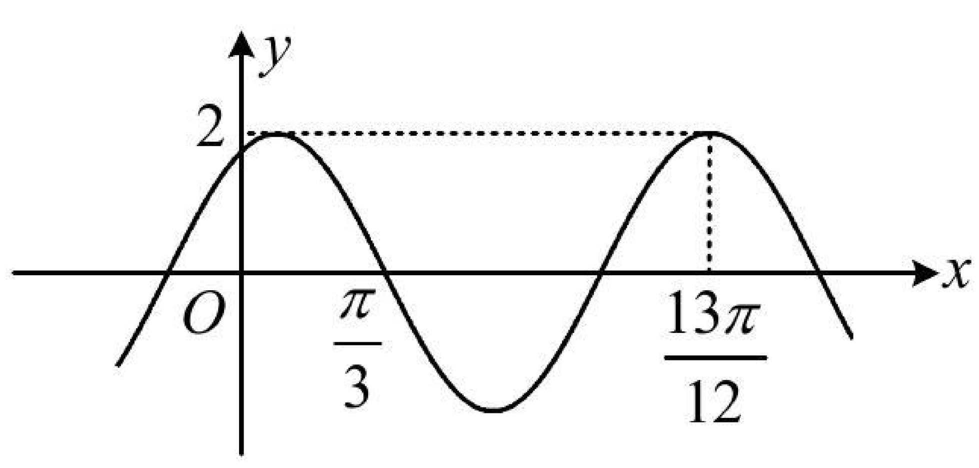
由题意，$f(x)=\dfrac{1-\cos(2x+\dfrac{2\pi}{3})}{2}+\dfrac{1+\cos 2x}{2}=1-\dfrac{1}{2}\cos(2x+\dfrac{2\pi}{3})+\dfrac{1}{2}\cos 2x$，

把 $\cos(2x+\dfrac{2\pi}{3})$ 拆开，就可以用辅助角公式合并，

$f(x)=1-\dfrac{1}{2}(\cos 2x\cos\dfrac{2\pi}{3}-\sin 2x\sin\dfrac{2\pi}{3})+\dfrac{1}{2}\cos 2x=1+\dfrac{\sqrt{3}}{4}\sin 2x+\dfrac{3}{4}\cos 2x=1+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin(2x+\dfrac{\pi}{3})$，

所以 $f(x)$ 的最小正周期 $T=\dfrac{2\pi}{2}=\pi$，值域为 $[1-\dfrac{\sqrt{3}}{2},1+\dfrac{\sqrt{3}}{2}]$.

3．（2021 • 全国甲卷 • ★★）已知函数 $f(x)=2\cos(\omega x+\varphi)$ 的部分图象如图所示，则 $f(\dfrac{\pi}{2})=$_____.



答案：$-\sqrt{3}$

解析：欲求 $f(\frac{\pi}{2})$，先把解析式中的 ω 和 φ 求出来，图上标了一个零点 $\frac{\pi}{3}$，一个最大值点 $\frac{13\pi}{12}$，由它们可求出 $f(x)$ 的最小正周期，从而求得 ω，

设 $f(x)$ 的最小正周期为 T，由图可知，$\frac{13\pi}{12}-\frac{\pi}{3}=\frac{3}{4}T$，所以 $T=\pi$，从而 $\frac{2\pi}{|\omega|}=\pi$，故 $\omega=\pm 2$，

不妨取 $\omega=2$，则 $f(x)=2\cos(2x+\varphi)$，要求 φ，首选代最值点，图中有 $x=\frac{13\pi}{12}$ 这个最大值点可代，

由图可知，$f(\frac{13\pi}{12})=2\cos(2\times\frac{13\pi}{12}+\varphi)=2\Rightarrow\cos(\frac{13\pi}{6}+\varphi)=1\Rightarrow\frac{13\pi}{6}+\varphi=2k\pi\Rightarrow\varphi=2k\pi-\frac{13\pi}{6}(k\in\mathbf{Z})$，

所以 $f(x)=2\cos(2x+2k\pi-\frac{13\pi}{6})=2\cos(2x-\frac{\pi}{6})$，故 $f(\frac{\pi}{2})=2\cos\frac{5\pi}{6}=-\sqrt{3}$.

【反思】同一个图象可以有不同的解析式，所以本题 ω 取 -2 也行，如果取 -2，答案会变吗？不会，因为求得的解析式必定能用诱导公式化为与 $\omega=2$ 相同.

4.（2023・全国乙卷・★★）已知函数 $f(x)=\sin(\omega x+\varphi)$ 在区间 $(\frac{\pi}{6},\frac{2\pi}{3})$ 单调递增，直线 $x=\frac{\pi}{6}$ 和 $x=\frac{2\pi}{3}$ 为函数 $y=f(x)$ 的图象的两条对称轴，则 $f(-\frac{5\pi}{12})=$（　　）

（A）$-\frac{\sqrt{3}}{2}$　　（B）$-\frac{1}{2}$　　（C）$\frac{1}{2}$　　（D）$\frac{\sqrt{3}}{2}$

答案：D

解析：条件中有两条对称轴，以及它们之间的单调性，据此可画出草图来分析，

如图，$\frac{2\pi}{3}-\frac{\pi}{6}=\frac{T}{2}\Rightarrow T=\pi$，所以 $|\omega|=\frac{2\pi}{T}=2$，故 $\omega=\pm 2$，

不妨取 $\omega=2$，则 $f(x)=\sin(2x+\varphi)$，

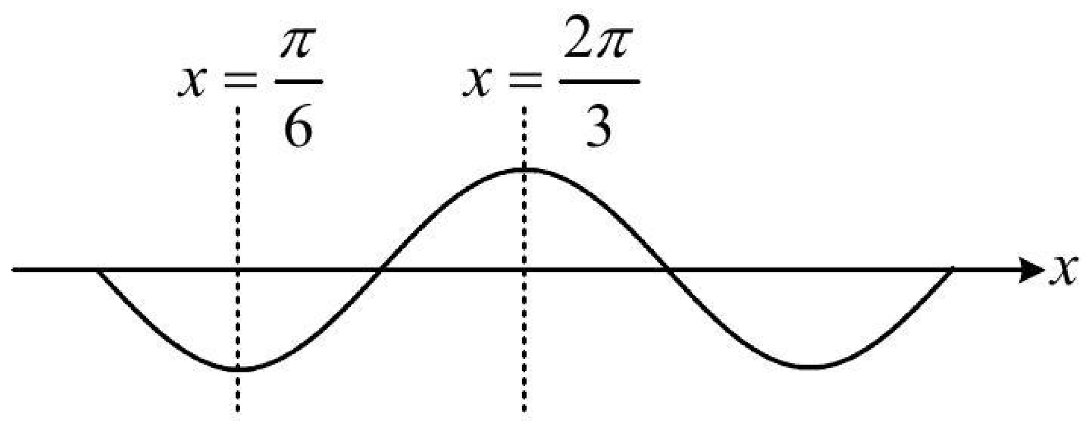
再求 φ，代一个最值点即可，

由图可知，$f(\frac{\pi}{6})=\sin(2\times\frac{\pi}{6}+\varphi)=\sin(\frac{\pi}{3}+\varphi)=-1$，

所以 $\frac{\pi}{3}+\varphi=2k\pi-\frac{\pi}{2}$，从而 $\varphi=2k\pi-\frac{5\pi}{6}(k\in\mathbf{Z})$，

故 $f(x)=\sin(2x+2k\pi-\frac{5\pi}{6})=\sin(2x-\frac{5\pi}{6})$，

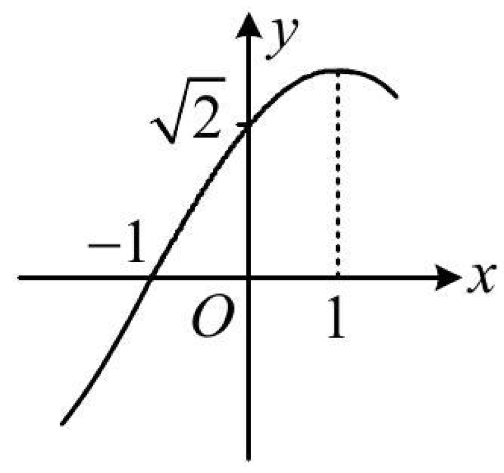
所以 $f(-\frac{5\pi}{12})=\sin[2\times(-\frac{5\pi}{12})-\frac{5\pi}{6}]=\sin(-\frac{5\pi}{3})=\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.



5.（2023・海南模拟・★★★）函数 $f(x)=A\cos(\omega x+\varphi)(A>0,\omega>0,|\varphi|<\frac{\pi}{2})$ 的部分图象如图所示，则

$f(\frac{7}{3})=$（ ）

（A）$\frac{1}{2}$ （B）$\frac{\sqrt{2}}{2}$ （C）$\frac{\sqrt{3}}{3}$ （D）1



答案：D

解析：图上标注了零点 -1 和最大值点 1，可由此求出周期，进而求得 ω，

由图可知，$1-(-1)=\frac{T}{4}\Rightarrow T=8\Rightarrow\omega=\frac{2\pi}{T}=\frac{\pi}{4}$，所以 $f(x)=A\cos(\frac{\pi}{4}x+\varphi)$，

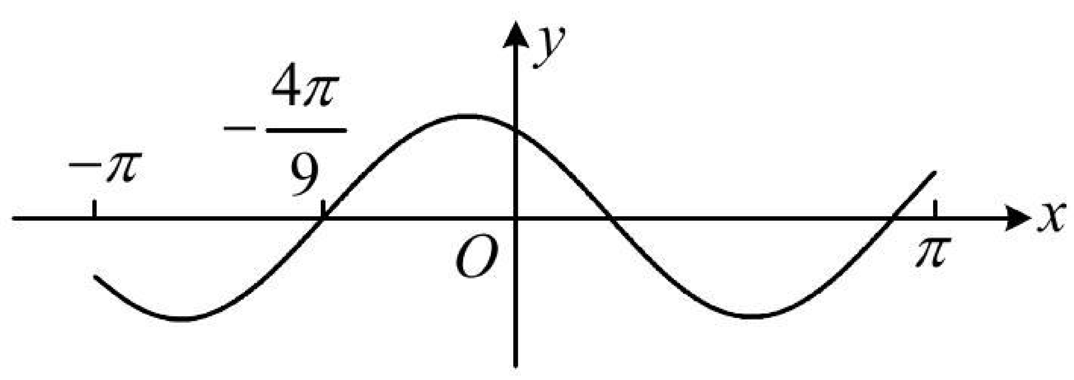
求 A 一般看最值，但图中没有标注最大值和最小值，观察发现图象上标了 $(-1,0)$ 和 $(0,\sqrt{2})$ 这两个点，故尝试把它们代入解析式，建立关于 A 和 φ 的方程组并求解，

$\begin{cases} f(-1)=A\cos(-\frac{\pi}{4}+\varphi)=0 \ ① \\ f(0)=A\cos\varphi=\sqrt{2} \ ② \end{cases}$，由①可得 $\cos(\varphi-\frac{\pi}{4})=0$，结合 $|\varphi|<\frac{\pi}{2}$ 可得 $\varphi=-\frac{\pi}{4}$，

代入②得 $A\cos(-\frac{\pi}{4})=\sqrt{2}$，所以 $A=2$，从而 $f(x)=2\cos(\frac{\pi}{4}x-\frac{\pi}{4})$，故 $f(\frac{7}{3})=2\cos(\frac{\pi}{4}\times\frac{7}{3}-\frac{\pi}{4})=2\cos\frac{\pi}{3}=1$.

6．（2020 • 新课标 I 卷 • ★★★）设 $f(x)=\cos(\omega x+\frac{\pi}{6})$ 在 $[-\pi,\pi]$ 的图象大致如下图，则 $f(x)$ 的最小正周期为（ ）

（A）$\frac{10\pi}{9}$ （B）$\frac{7\pi}{6}$ （C）$\frac{4\pi}{3}$ （D）$\frac{3\pi}{2}$



答案：C

解析：要求最小正周期，可先求 ω，图上只有 $(-\frac{4\pi}{9},0)$ 这一个点可代入解析式，所以把它代进去，

由图可知，$f(-\frac{4\pi}{9})=\cos(-\frac{4\pi}{9}\omega+\frac{\pi}{6})=0$，所以 $-\frac{4\pi}{9}\omega+\frac{\pi}{6}=k\pi+\frac{\pi}{2}$，解得：$\omega=-\frac{3+9k}{4}(k\in\mathbf{Z})$ ①，

图中 x 轴上还标记了 $x=-\pi$ 和 $x=\pi$ 这两个位置，它们虽不能代入解析式，但可用于估算周期的范围，从而得到 ω 的范围，例如，$-\frac{4\pi}{9}$ 与 π 之间的部分超过 1 个周期，$-\pi$ 与 $-\frac{4\pi}{9}$ 之间的部分不足半个周期，

设 $f(x)$ 的最小正周期为 T，由图可知，$\frac{T}{2}>-\frac{4\pi}{9}-(-\pi)$，故 $T>\frac{10\pi}{9}$，

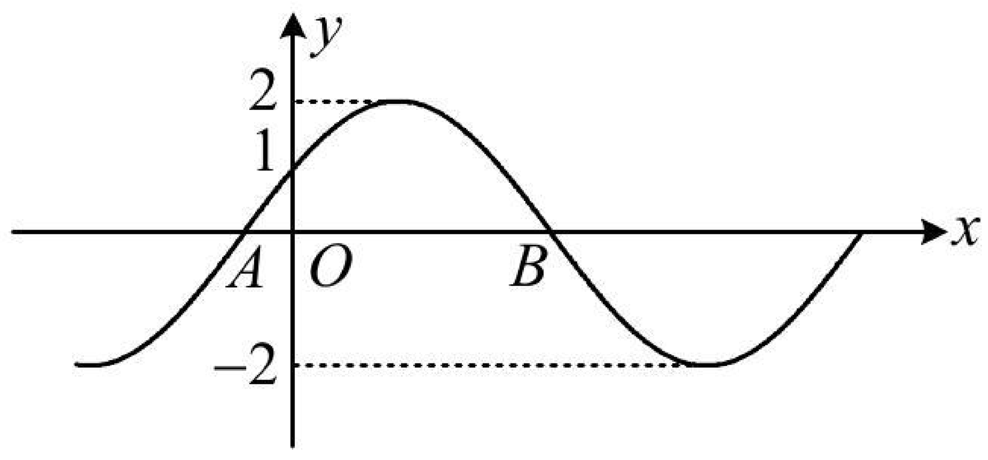
另一方面，$\pi-(-\frac{4\pi}{9})>T$，所以 $T<\frac{13\pi}{9}$，故 $\frac{10\pi}{9}<T<\frac{13\pi}{9}$，所以 $\frac{10\pi}{9}<\frac{2\pi}{|\omega|}<\frac{13\pi}{9}$，解得：$\frac{18}{13}<|\omega|<\frac{9}{5}$，

结合式①，可尝试 $k=\pm2$， ±1，0 等值，可以发现只有 $k=-1$ 才能满足上述范围，

所以 $\omega=-\frac{3+9\times(-1)}{4}=\frac{3}{2}$，故 $T=\frac{2\pi}{\omega}=\frac{4\pi}{3}$.

7.（2022 • 福州模拟 • ★★★）如图，A，B 是函数 $f(x)=2\sin(\omega x+\varphi)(\omega>0,|\varphi|<\frac{\pi}{2})$ 的图象与 x 轴的两个交点，若 $|OB|-|OA|=\frac{4\pi}{3}$，则 $\omega=$（　　）

（A）1　（B）$\frac{1}{2}$　（C）2　（D）$\frac{2}{3}$



答案：B

解法 1：图象上横纵坐标都已知的点只有 $(0,1)$ 这一个，先把它代入解析式，求得 φ，

由图可知，$f(0)=2\sin\varphi=1$，所以 $\sin\varphi=\frac{1}{2}$，又 $|\varphi|<\frac{\pi}{2}$，所以 $\varphi=\frac{\pi}{6}$，故 $f(x)=2\sin(\omega x+\frac{\pi}{6})$，

接下来求 ω，$|OB|-|OA|=\frac{4\pi}{3}$ 这个条件肯定要用，所以我们求出 A、B 的横坐标来表示 $|OB|$ 和 $|OA|$，

令 $f(x)=0$ 可得 $\sin(\omega x+\frac{\pi}{6})=0$，所以 $\omega x+\frac{\pi}{6}=k\pi$，故 $x=\frac{1}{\omega}(k\pi-\frac{\pi}{6})(k\in\mathbf{Z})$，

从图象来看，点 A 处是 $f(x)$ 从 y 轴往左边的第一个零点，必定为 $k=0$ 的情形，

令 $k=0$ 得：$x=-\frac{\pi}{6\omega}$，所以 $x_A=-\frac{\pi}{6\omega}$；

点 B 处是 $f(x)$ 从 y 轴往右边的第一个零点，必定为 $k=1$ 的情形，令 $k=1$ 得：$x=\frac{5\pi}{6\omega}$，所以 $x_B=\frac{5\pi}{6\omega}$；

从而 $|OA|=\frac{\pi}{6\omega}$，$|OB|=\frac{5\pi}{6\omega}$，故 $|OB|-|OA|=\frac{5\pi}{6\omega}-\frac{\pi}{6\omega}=\frac{2\pi}{3\omega}$，由题意，$\frac{2\pi}{3\omega}=\frac{4\pi}{3}$，解得：$\omega=\frac{1}{2}$.

解法 2：$f(x)$ 的图象可由 $y=2\sin x$ 经过横向的平移和伸缩得来，$y=2\sin x$ 的图象如图 2，横向的平移和伸缩不会改变水平方向上的线段长度的比例关系，所以图 1 中 $\frac{|OA|}{|OB|}$ 与图 2 中 $\frac{|OM|}{|MN|}$ 相等，

由图 2 可知 $\frac{|OM|}{|MN|}=\frac{\frac{\pi}{6}-0}{\pi-\frac{\pi}{6}}=\frac{1}{5}$，所以 $\frac{|OA|}{|OB|}=\frac{1}{5}$，结合 $|OB|-|OA|=\frac{4\pi}{3}$ 可得 $|OA|=\frac{\pi}{3}$，$|OB|=\frac{5\pi}{3}$，

所以 $|AB|=|OA|+|OB|=2\pi$，由图 1 可知 $|AB|=\frac{T}{2}$，其中 T 为 $f(x)$ 的最小正周期，

所以$\frac{T}{2}=2\pi$，从而$T=4\pi$，故$\omega=\frac{2\pi}{T}=\frac{1}{2}$.

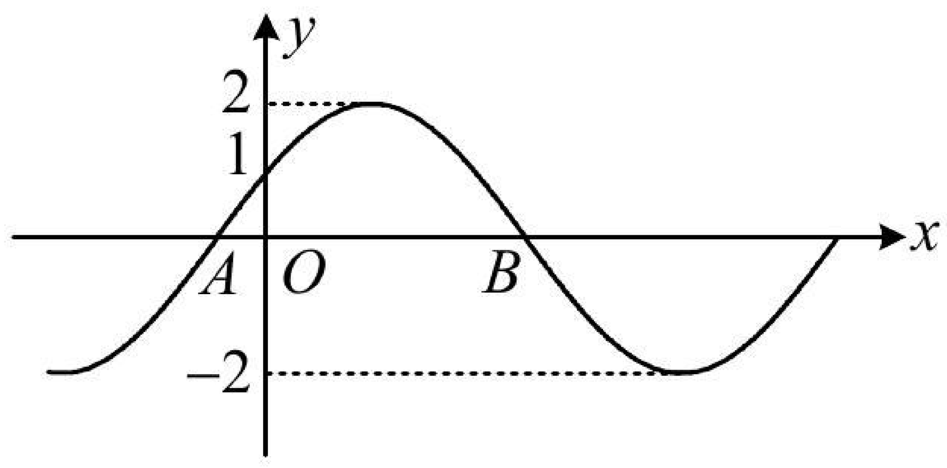


图1

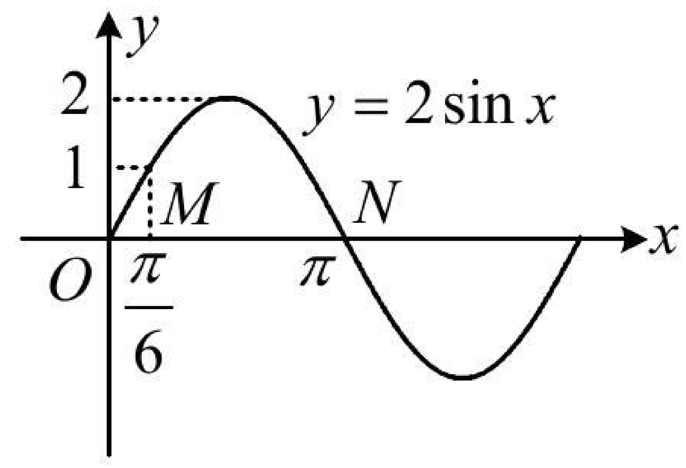


图2